

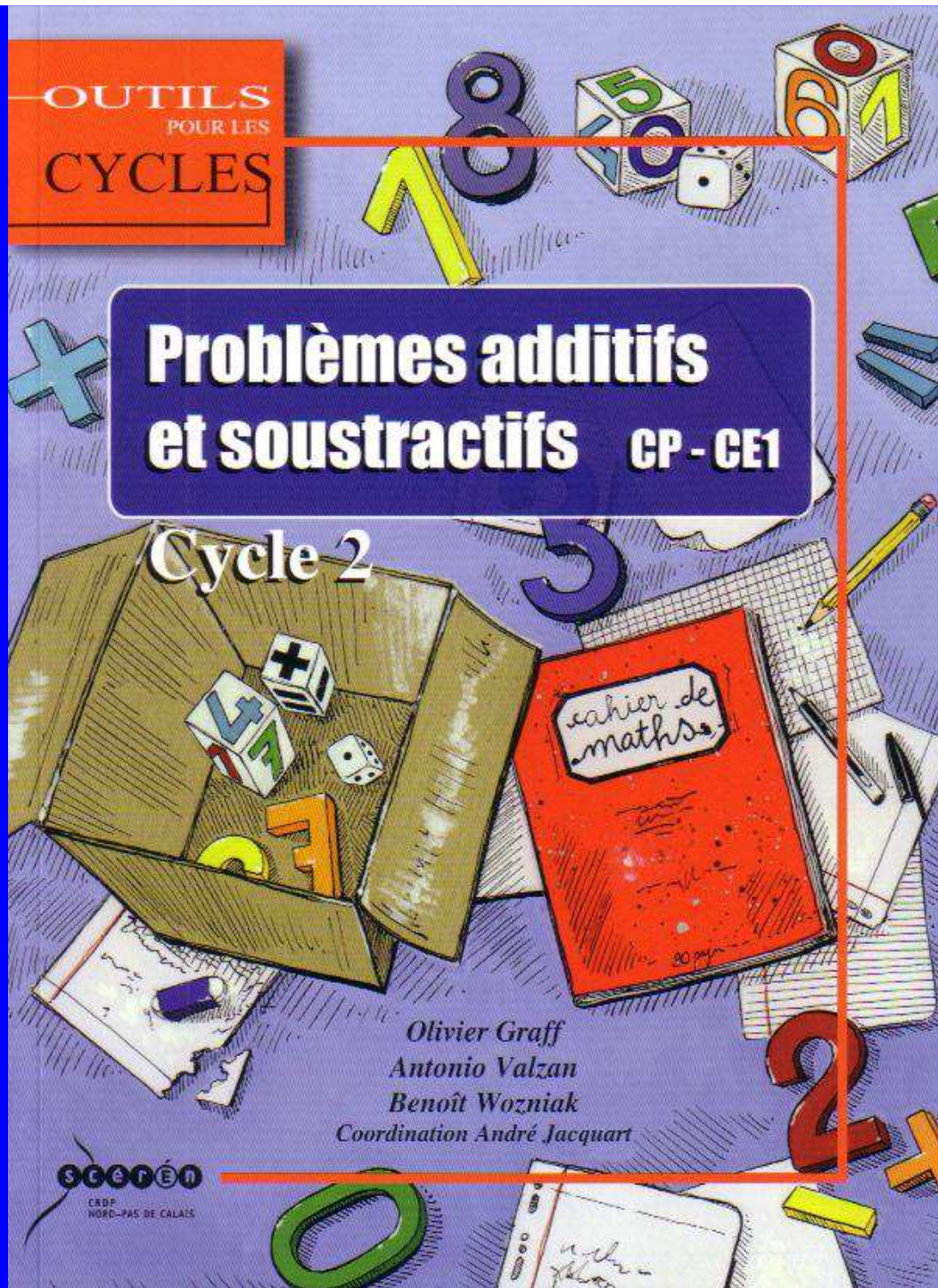
OUTILS
POUR LES
CYCLES

**Problèmes additifs
et soustractifs CP - CE1**

Cycle 2

Olivier Graff
Antonio Valzan
Benoît Wozniak
Coordination André Jacquart

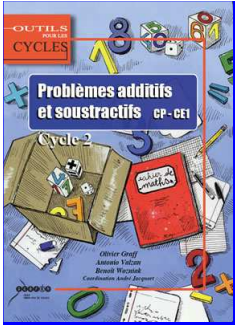
SCÉREN
CRDP
NORD-PAS DE CALAIS



Problème Additifs et Soustractifs

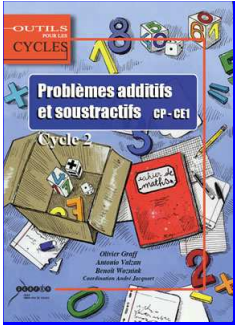
CP CE1

- Animation du mercredi 17 Octobre 2012
- Circonscription de Boulogne sur Mer
- Adresse du site de présentation de l'ouvrage:
http://crdp.ac-lille.fr/sceren/article.php3?id_article=2101



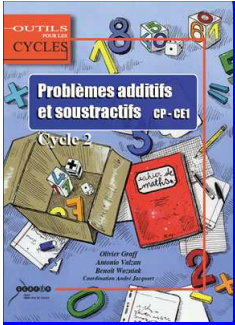
Plan de l'animation

- 1. Les enjeux des Instructions de 2008 en mathématiques
- 2. Qu'est-ce qu'un problème additif ou soustractif ?
- 3. Les intérêts de l'ouvrage.
- 4. Typologie, classification des problèmes d'après Vergnaud.
 - Présentation et intérêts à travailler cette typologie.
- 5. Mise en œuvre d'une pédagogie pour l'apprentissage de la résolution
 - Analyse des difficultés
 - Les axes de médiation



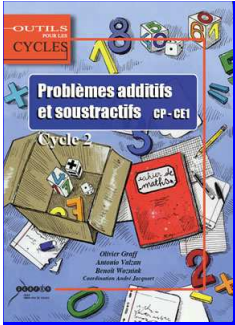
Les enjeux des I.O en mathématiques

- Construction du nombre, résolution de problèmes, sens des opérations, construction des concepts mathématiques se mènent conjointement (Butlen, Brissiaud, Durpaire)
- Apprendre à automatiser (Butlen).
- Organiser la progressivité des apprentissages (I.O, Durpaire).



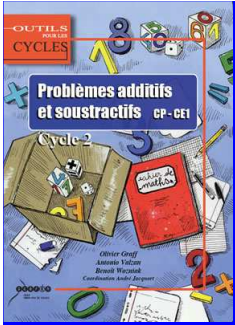
Qu'est-ce qu'un problème additif ou soustractif ?

- Les problèmes qui se résolvent par une addition ou une soustraction relèvent de ce qu'on appelle « le champ additif »



Les intérêts de l'ouvrage

- Présenter et analyser les problèmes additifs pour anticiper les obstacles et les difficultés
- Proposer une démarche centrée sur la progressivité, la différenciation afin d'automatiser la procédure de résolution des problèmes additifs.



QUIZZ

- Combien existe t-il de types de problèmes additifs ?

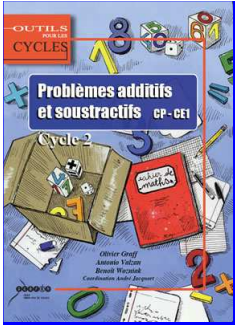
- 2 5 12 plus ?

Un constat

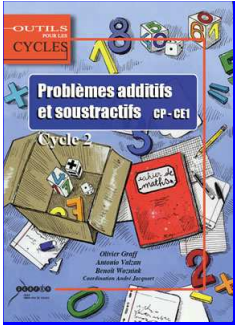
Types de problème	Proportion de réussite sur 100			
	GS	CP	CE1	CE2
1- X a 3 billes. Y a 5 billes. Combien X et Y ont – ils de billes ensemble ? (5+3)	100	100	100	100
2- X avait 3 billes. Puis Y lui a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant X ? (5+3)	87	100	100	100
3- X avait des billes. Il en a donné 5 à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien avait-il de billes ? (5+3)	22	39	70	80
4- X avait 8 billes. Puis il a donné 3 billes à Y. Combien de billes a maintenant X ? (8-3)	100	100	100	100

Suite du tableau...

Types de problème	Proportion de réussite sur 100			
	GS	CP	CE1	CE2
5- X et Y ont ensemble 8 billes. X a 3 billes. Combien Y a-t-il de billes ? (8-3)	22	39	70	100
6- X avait 3 billes. Y lui en a donné. X a maintenant 8 billes. Combien de billes Y a-t-il données à X ? (8-3)	61	56	100	100
7- X avait 8 billes. Il en a donné à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien de billes X a-t-il données à Y ? (8-3)	91	78	100	100

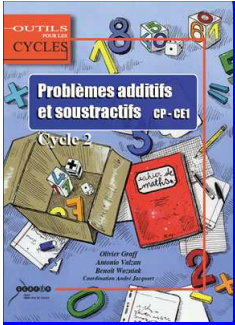


- A contexte égal (jeu de billes), à mêmes valeurs numériques, tous les problèmes relevant de l'addition ne sont pas de même difficulté.
- Un grand nombre de problèmes relevant d'une soustraction sont beaucoup mieux réussis que d'autres relevant d'une addition.
- Le maître est responsable des problèmes qu'il choisit pour aider les élèves à construire ses connaissances.



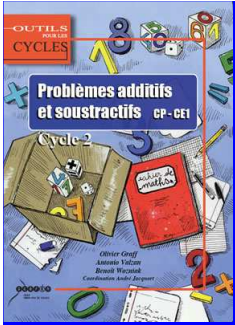
Typologie d'après Vergnaud

- Présentation
- Réponse au QUIZZ
- Intérêt à travailler cette typologie



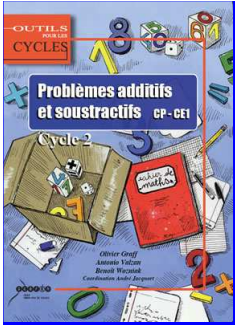
4 catégories de problèmes simples

- Transformation : **(ete)**
- Composition d'états ou (combinaison): **(eee)**
- Comparaison **(ece)**
- Composition de transformations (non traitée au cycle 2): **(ttt)**

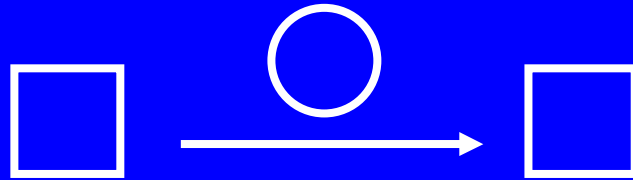


Dans la terminologie e ou e , l'élément cherché sera toujours indiqué en majuscule.

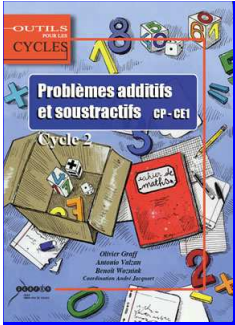
Ex: dans les problèmes $e+E$, l'élément à rechercher (ou l'inconnue) sera l'état final après une transformation positive de l'état initial .



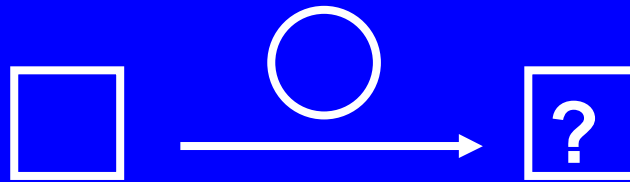
I– Catégorie : Transformation: (ete)



- problèmes du type : état initial – transformation (positive + ou négative -) – état final

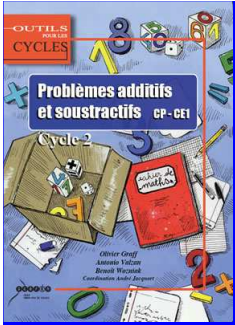


- Recherche de l'état final après une transformation positive de l'état initial : $e + E$



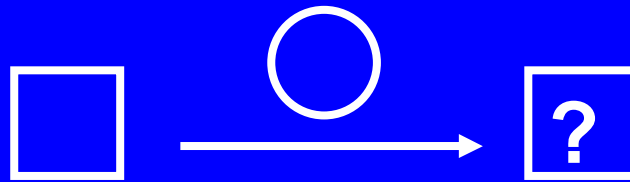
Ex:

Au début de la récréation, Pierre a 27 billes. Il joue avec Juliette et il en gagne 35. Combien a-t-il de billes à la fin de la récréation.



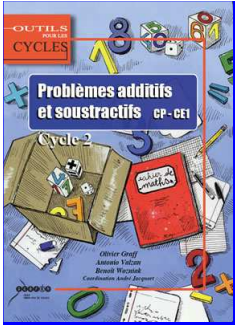
- Recherche de l'état final après une transformation négative de l'état initial : **e t- E**

Ex:



Ce matin, le boulanger a fabriqué 78 baguettes. Il en a vendu 56 durant la journée.

Combien lui en reste-t-il à la fin de la journée ?



- Recherche de la transformation positive connaissant l'état initial et l'état final :
 $e \quad T+ \quad e$



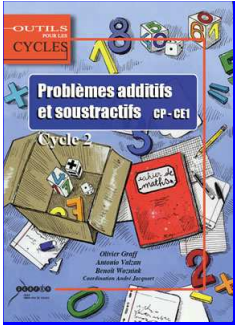
Ex:

Des enfants jouent aux fléchettes. Chaque enfant doit lancer deux fléchettes. Un enfant lance sa première fléchette et marque 17 points.

Puis il lance la deuxième.

Son copain lui dit que ça fait 35 points en tout.

Combien de points a-t-il marqué avec sa deuxième fléchette ?



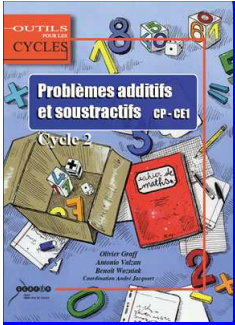
- Recherche de la transformation négative connaissant l'état initial et l'état final :
 $e \text{ T- } e$



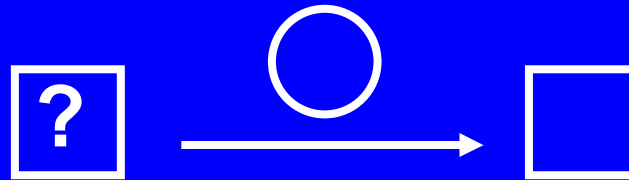
Ex:

Ce matin, Pierre avait 27 billes. En repartant chez lui le soir, il recompte ses billes et il n'en a plus que 12.

Combien a-t-il perdu de billes aujourd'hui ?



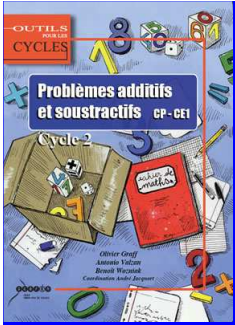
- Recherche de l'état initial ayant subi une transformation positive : **E t+ e**



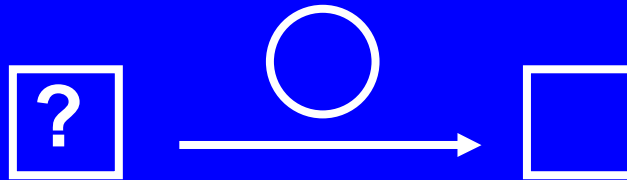
Ex:

Pendant la récréation, Pierre a gagné 27 billes. En repartant chez lui le soir, il recompte ses billes, il en a 52.

Combien en avait-il en arrivant à l'école ce matin ?



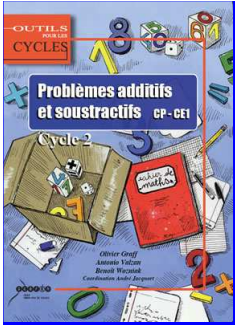
- Recherche de l'état initial ayant subi une transformation négative : **E t- e**



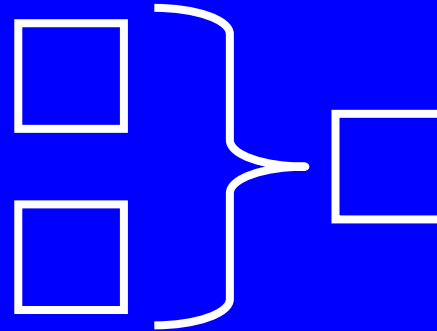
Ex:

Durant sa journée, le boulanger a vendu 43 baguettes et il ne lui en reste plus que 7.

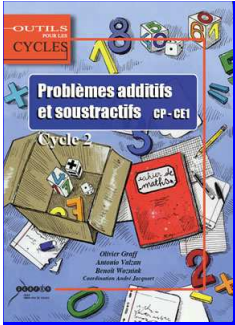
Combien avait-il préparé de baguettes avant d'ouvrir son magasin ?



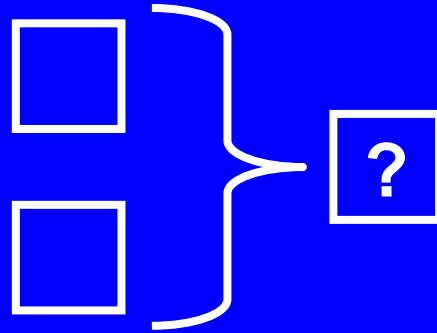
II – Catégorie : Combinaison d'états (eee)



- problèmes du type : **partie – partie - tout**



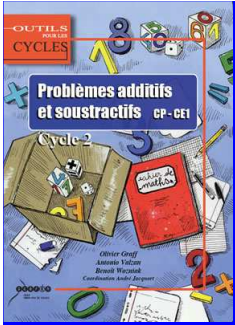
- Recherche du tout dans le cas d'une combinaison d'états: $e e E$



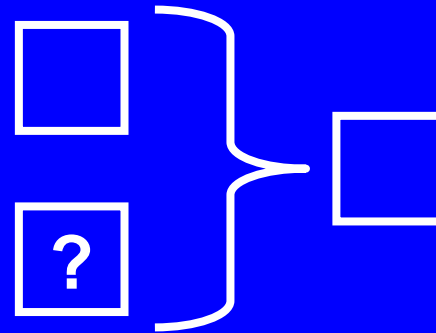
Ex:

Dans la classe de CP, il y a 13 garçons et 17 filles.

Combien d'élèves sont en CP ?



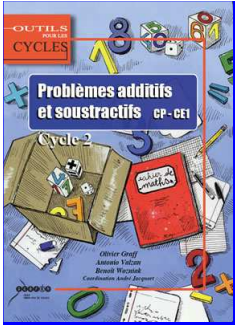
- Recherche d'une partie dans le cas d'une combinaison d'états: $e E e$



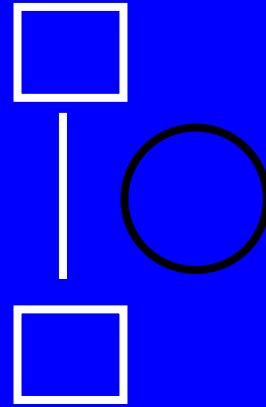
Ex:

Dans la classe de CP, il y a 26 élèves dont 12 filles.

Combien de garçons sont en CP ?



III – Catégorie : Comparaison d'états : (ece)

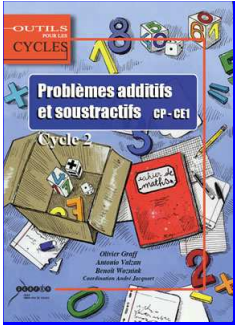


- problèmes du type :

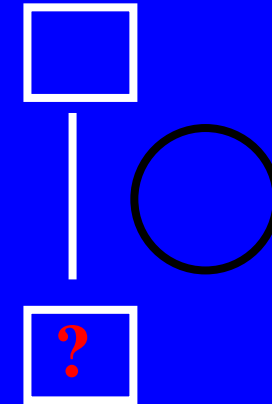
état 1

comparaison (positive + ou négative -)

état 2



- Recherche d'un des états avec une comparaison positive :
 $E c+ e$ ou $e c+ E$

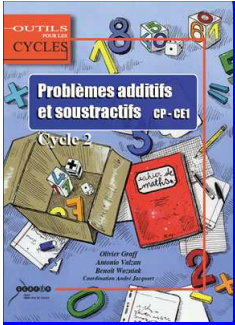


Ex1:

Jean a 27 billes. Il en a 8 de plus qu'Aline.
Combien Aline a-t-elle de billes ?

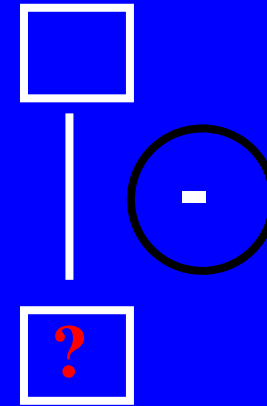
Ex2:

Pierre a 27 billes. Paul en a 8 de plus que lui.
Combien Paul a-t-il de billes ?



- Recherche d'un des états avec une comparaison négative.

e c- E ou E c- e



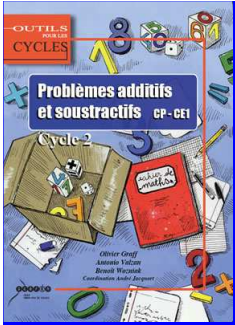
Ex1 :

Marie a 27 jetons. Luc en a 12 de moins qu'elle.
Combien de jetons Luc a-t-il ?

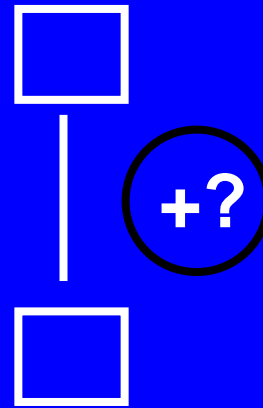
Ex2 :

Gilles a des jetons. Jacques en a 12 de moins que lui. Jacques a 27 jetons.

Combien Gilles a-t-il de jetons ?



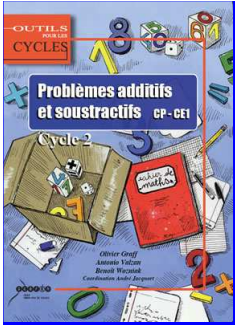
- Recherche de la comparaison positive : (e C+ e)



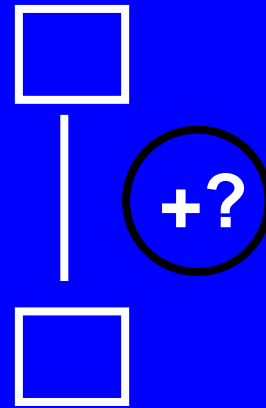
Ex:

Pierre a 27 billes. Paul en a 34.

Combien Paul a-t-il de billes de plus que Pierre?



- Recherche de la comparaison négative
(e C- e)



Ex:

Marie a 34 jetons et Luc en a 27.

Combien Luc a-t-il de jetons de moins que Marie ?

Intérêt à travailler cette typologie.

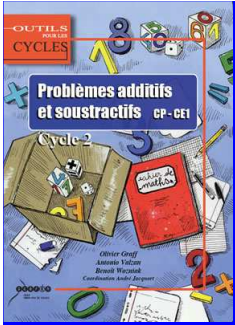
La connaissance des différentes structures par le maître va lui permettre de mettre en place une programmation.

Cette connaissance va permettre aux élèves d'effectuer des classes de problèmes et des comparaisons.

Ces catégorisations et comparaisons contribuent à la création du concept mathématique.

Le processus d'identification de la catégorie par analogie permet l'automatisation.

L'automatisation permet de libérer de l'énergie cognitive qui sera dévolue à des tâches annexes.



Réponse au QUIZZ

Il existe donc 16 types de problèmes additifs (dont 14 seront vus au CP et CE1):

- ❖ Les 6 problèmes de transformation
- ❖ Les 2 problèmes de combinaison
- ❖ Les 6 problèmes de comparaison
- ❖ Les 2 problèmes de combinaison de transformation

Récapitulatif: (Programmation proposée)

PROGRAMATION	SEQUENCES	TYPE DE PROBLEME	MODULES						
Trimestre 1 CP	SEQUENCE 1	et+ E et-E	1						
Trimestre 2 CP	SEQUENCE 2	eeE eEe		2					
Trimestre 3 CP	SEQUENCE 3	eT+e eT-e			3				
Trimestre 1 CE1	SEQUENCE 4	ec+E ou Ec+e ec-E ou Ec-e				4			
Trimestre 2 CE1	SEQUENCE 5	eC+e eC-e					5		
Trimestre 3 CE1	SEQUENCE 6	Et+e Et-e						6	

Exerçons nous !!!

Pour chaque problème, notez son numéro.

Indiquez **T** s'il s'agit d'un problème de Transformation, **C** pour comparaison, et **CS** pour composition;

Indiquez ce que l'on cherche.

Extrait de la banque de 261
problèmes en fin d'ouvrage, classés
par niveau et par structure.

Banque disponible sur le site du CRDP

1. J'ai 8 nounours et ma sœur en a 13.

Combien ai-je de nounours de moins que ma sœur ?

e C- e

2. J'ai cassé 2 verres et maintenant il m'en reste 4.

Combien avais-je de verres avant la « casse » ?

E t- e

3. Sur la table, pose 5 voitures rouges et 4 voitures jaunes.

Compte combien tu as de voitures en tout.

e e E

1. Anne est arrivée 27^{ème} de la course. Louis a terminé 6 places derrière Anne.

A quelle place Louis est-il arrivé ?

e c- E

2. A la course, Alex est arrivé 35^{ème} et Farid 69^{ème}.

De combien de places Farid est-il derrière Alex ?

e C- e

3. Tu avais 4 sucettes. Tu en as mangées 2.

Combien t'en reste t-il maintenant ?

e t- E

1. Pierre avait 9 billes. Il en gagne 6 à la récréation.
Combien en a-t-il maintenant ?

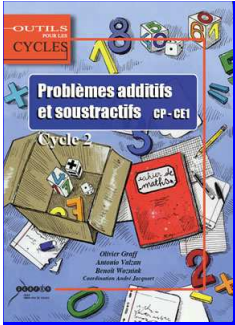
$$e + E$$

2. La bibliothèque municipale a maintenant 14 560 livres après la suppression de 831 livres anciens et abîmés. **Combien y avait-il de livres avant cette suppression ?**

$$E - e$$

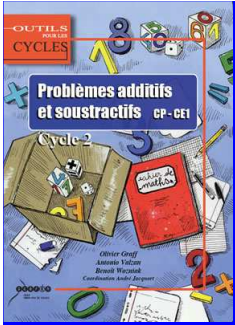
3. Tu pars de la case 9 sur le jeu de l'oie, et tu vas sur la case 13. **De combien de cases as-tu avancé?**

$$e + T + e$$



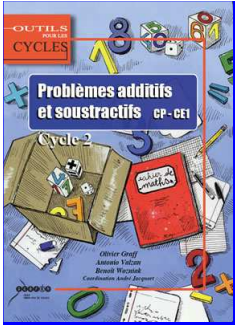
Mise en œuvre d'une pédagogie pour l'apprentissage de l'automatisation de la procédure de résolution

- A partir du dispositif présenté dans l'ouvrage qui porte plus sur la médiation que sur la remédiation..

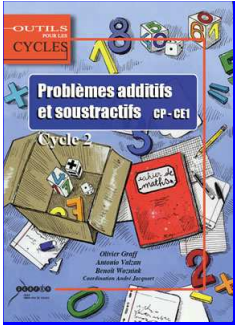


Analyse des difficultés

- Situation ou énoncé ?
- Évoquer l'énoncé.
- Word problem vs World problem.
- Représenter l'histoire de l'énoncé.
- Opérationnaliser.
- Justifier, valider.

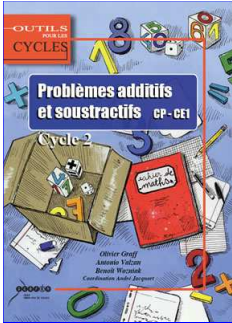


Cas d'une nouvelle structure: $E t + e$



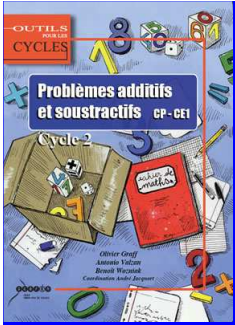
L'évaluation diagnostique

- Elle permet de situer l'élève par rapport à des capacités telles que *représenter*, *évoquer* en plus de celles relatives à la mise en opérations de la situation.



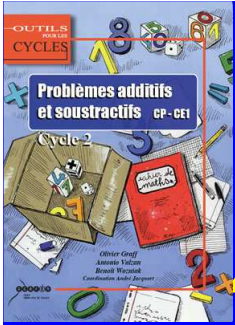
L'évaluation diagnostique

	Procédure spontanée		Procédure générique
	Dessin	Langage symbolique suivant la chronologie de l'action : addition à trou	Langage symbolique suivant la chronologie inverse de l'action : soustraction
Représentation correcte de la situation : transformation traitée correctement			
Non représentation de la situation			



Situation de découverte

Il va falloir deviner le nombre de jetons que tu as dans ton enveloppe au départ. Tu as une enveloppe avec des jetons dedans. Tu en remets 14. Maintenant tu ouvres l'enveloppe et tu comptes: il y a 39 jetons.



Les moyens de lever les obstacles

L' évocation de la classe de problème (problème de transformation) et du **but à atteindre** (recherche de l'état initial) .

La comparaison avec les affiches référentes servant à regrouper les problèmes de même « type » .

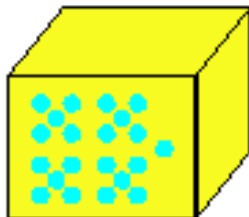
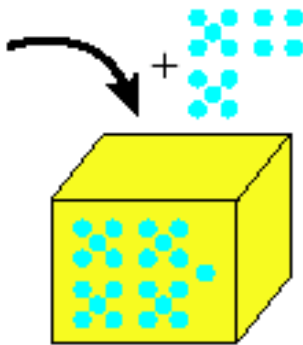
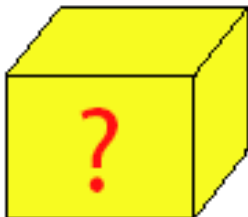
L'utilisation d'une fiche outil servant à élaborer une procédure spontanée de résolution .

Exemple de fiche outil renseignée
Type de problème n° 1



J'ai 21 jetons dans une boîte. J'en ajoute 14.
Combien y a-t-il de jetons dans la boîte ?

Le mot **ajoute** indique qu'il y a une action. On la représente par une flèche. On accompagne cette flèche du symbole mathématique +.

Présentation de la situation

	Départ	Action	Fin
Dessin			

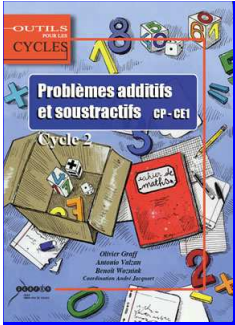
Recherche

Schéma		+ 	?
Calcul	21	+ 14	= ?

On peut proposer le calcul additif correspondant : $21 + 14 = 35$

Communication du résultat

Conclusion (phrase réponse)	Dans ma boîte, il y a 35 jetons.
--------------------------------	----------------------------------



Fiche outil

Fiche outil pour résoudre un problème avec action			
	Départ	Action	Fin
Dessin			
Schéma			
Calcul			
Autre recherche :			
Conclusion (phrase réponse) :			



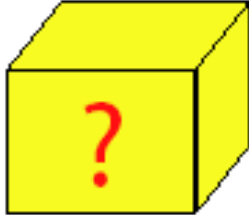
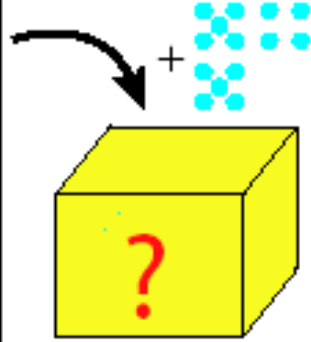
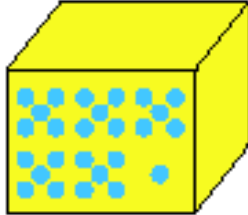
Exemple de fiche outil renseignée

Type de problème n° 14



J'ai des jetons dans une boîte. J'en **ajoute** 14. Maintenant, j'en ai 26.
Combien y avait-il de jetons dans la boîte ?

Le mot **ajoute** indique qu'il y a une action. On représente cette action par une flèche. On accompagne cette flèche du symbole mathématique +.

Présentation de la situation

	Départ	Action	Fin
Dessin			

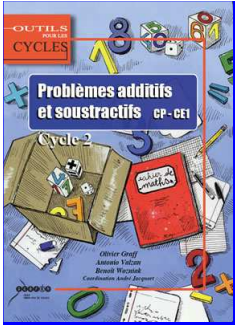
Recherche

Schéma	?	+ 	
Calcul	?	+ 14	= 26

On peut proposer le calcul soustractif correspondant : $26 - 14 = 12$

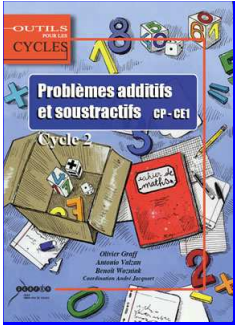
Communication du résultat

Conclusion (phrase réponse)	Dans ma boîte, il y avait 12 jetons.
--------------------------------	--------------------------------------



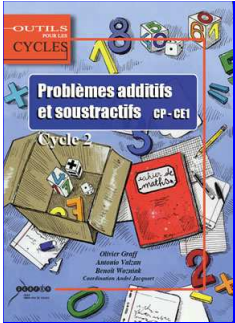
Vers la procédure générique

- La phase de résolution par procédure spontanée doit aboutir à formaliser l'équivalence de cette procédure avec la procédure générique: c'est l'enjeu majeur de la conceptualisation et le rôle de l'École.



Situation d'entraînement

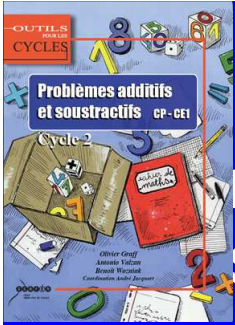
- Il s'agit de présenter des problèmes dans le même contexte. L'intérêt est de justifier.
- C'est aussi l'occasion de travailler sur les paramètres liés à la présentation des énoncés:



Quelques paramètres

Les variables rhétoriques

- Les indices sémantiques présents dans l'énoncé comme *donne*, *vend*, *achète* favorisent ou complexifient la compréhension de l'énoncé.
- Les énoncés dont le thème est connu des élèves sont majoritairement mieux réussis.
- Les déclencheurs inclus dans la question, comme *en tout*, *reste-t-il*, *chacun*, font partie des indices qui conditionnent les performances.
- L'organisation des événements temporels et syntaxiques est à considérer: il arrive que l'ordre des événements de l'histoire ne soit pas celui dans lequel ils sont relatés dans l'énoncé. La coïncidence entre la chronologie des événements et celle du récit (énoncé) est un facteur favorisant.
- Le placement de la question en tête d'énoncé entraîne une augmentation des performances.
- Tout comme le contexte, le vocabulaire familier à l'élève est facilitant.



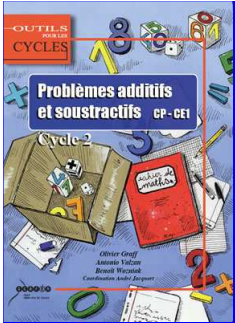
Les variables sémantico-conceptuelles

Savoir qu'il existe différents types de problèmes au sein d'une même structure, correspondant à la recherche de différents états, permet à l'élève d'élargir son champ de résolution.

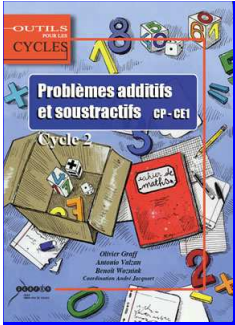
La correspondance entre l'ordre d'apparition des nombres et celui dans lequel ils doivent être traités est favorable aux performances.

Il en est de même pour la coïncidence entre un déclencheur et l'opérateur mathématique : *combien y en a-t-il en plus ?* peut se traiter par une soustraction ou par une addition (dans le cas d'une composition d'états).

La correspondance entre l'indice sémantique et l'opérateur mathématique est également un facteur facilitateur : *Paul mesure 130 cm. C'est 24 cm de plus que sa sœur. Combien mesure sa sœur?*

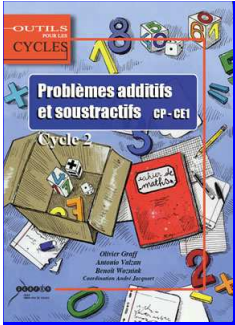


- **Les variables numériques**
 - Le choix de la taille des nombres détermine de rester ou non dans le champ numérique connu par les élèves. Cette variable permet de rendre impossible la manipulation et donc d'obliger l'élève à se concentrer sur les procédures.
 - La taille des nombres n'est pas forcément un critère de difficulté. Il faut tenir compte des relations ou des écarts particuliers qui existent entre ces nombres : 500 ou 700 sont des « grands nombres » mais avec un écart facilement identifiable ; 80 et 20 sont liés par le rapport de 4...
 - On peut ou non inclure dans l'énoncé des valeurs inutiles à la résolution du problème.



Situations de réinvestissement

- Elles se caractérisent par une décontextualisation des situations: derrière les « traits de surface », les élèves doivent identifier la structure.
- La structuration passe par la production d'énoncés.



Préparation type

Séance de réinvestissement.

- **Objectifs :**
 - Elaborer une procédure personnelle de résolution pour un problème du type « _____ » ;
 - Passer d'une procédure personnelle à une procédure experte pour un problème du type « _____ ».
- **Compétences visées :**
 - Résoudre des problèmes simples faisant intervenir l'addition ou la soustraction.
- **Déroulement :**
- **Phase d'appropriation du problème et de la consigne :**
 - Lecture silencieuse du problème (*Oral / individuel*)
 - Lecture orale du problème (*Oral / collectif*)
 - Reformulation par les élèves (*Oral / collectif*)

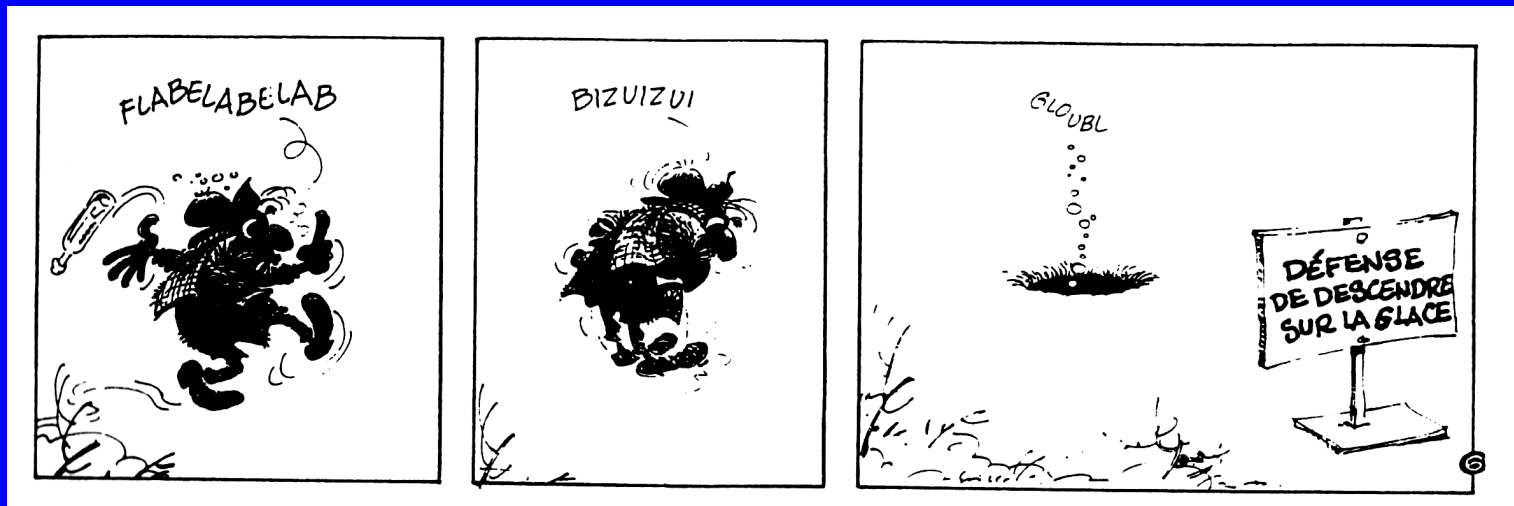
- Phase de recherche :
 - Différenciée suivant les élèves : (*Ecrit (ou oral) / individuel*)
 - Evocation de la situation concrète pour les élèves en niveau 1 puis passage au niveau 2 ;
 - Evocation d'une mise en relation de la situation avec une situation référente pour les élèves en niveau 2 puis passage à l'élaboration d'une procédure personnelle de résolution ;
 - Elaboration d'une procédure personnelle de résolution pour les élèves en niveau 3 ou 4 ;
 - Elaboration de la procédure experte pour les élèves en niveau 5.
- Phase de conflit socio-cognitif : (*Oral / Groupes de 2*)
 - Par groupes de deux élèves, interactions sur les procédures utilisées (deux élèves élaborant chacun une procédure de résolution d'un niveau immédiatement supérieur) et passage éventuel d'une procédure personnelle vers une procédure experte.
-

- Phase de mise en commun des procédures : (*Oral / collectif*)
 - Présentation des différentes procédures en allant du niveau 1 au niveau 5 ;
 - Justification du point de vue et argumentation proprement dite : interaction des élèves qui répondent aux questions « comment ? » et « pourquoi ? »
- Phase de structuration des connaissances procédurales: (*Oral / collectif*)
- Faire sienne une nouvelle procédure en interrogeant les démarches des autres élèves pour l'élaboration d'une procédure pour un problème du type « _____ »

Extrait d'une conférence de Rémi Brissiaud

source Irem Réunion avec leur aimable autorisation

<http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/spip.php?article130>



Pour faire un trou et pêcher, un esquimau a uriné les 1,5 litres de pipi nécessaires pour faire fondre la couche de glace de 16 cm d'épaisseur.

Combien de litres de pipi faudra t-il pour percer le même trou mais dans une épaisseur de glace de 13 m ?

Combien d'esquimaux faudra t-il inviter pour faire un trou identique dans la glace de la patinoire de Proville épaisse de 1,30 m ?

Tableau synthétique de la séquence

ORGANISATION DE LA SÉQUENCE 6

Problèmes de type Et+e & Et-e Parcours d'enseignement et itinéraire d'apprentissage de l'élève

Objectif de la séquence : savoir résoudre les problèmes additifs et soustractifs de type Et+e & Et-e par procédure générique.

Progression des séances	SÉANCE 1	SÉANCE 2	SÉANCE 3	SÉANCE 4	SÉANCE 5	SÉANCE 6a	SÉANCE 6b	SÉANCE 7	SÉANCE 8	SÉANCE 9	SÉANCE 10
Type de situation	Problème de découverte	Problème de découverte	Entraînement	Création d'outils de résolution	Entraînement	Entraînement	Réinvestissement	Problème de découverte	Problème de découverte	Réinvestissement	Évaluation
Type de problèmes	Et+e	Et-e	Et-e Et+e	Et-e Et+e	Et-e Et+e	Et-e Et+e	Et-e Et+e	Et-e	Et+e	Et-e Et+e	Et-e Et+e
Descriptif de la situation	Jeu des enveloppes	Jeu des enveloppes	Jeu des enveloppes	Boîte jaune	Boîte jaune	Boîte jaune	Hors contexte connu	Jeu du 25	Jeu du 25	Hors contexte connu	Hors contexte connu
Particularité				Mise en place d'outils de résolution		Atelier soutien	Atelier renforcement			Création d'énoncés	Évaluation différenciée
Contexte	Cardinal	Cardinal	Cardinal	Cardinal	Cardinal	Cardinal	Cardinal	Ordinal	Ordinal	Cardinal Ordinal	Cardinal Ordinal
Activité mentale de l'élève	Construction d'une procédure : générique ou spontanée	Construction d'une procédure : générique ou spontanée	Évolution des procédures (connue → inconnue / spontanée → générique)	Prise de conscience de la spécificité de chaque procédure	Évolution des procédures (connue → inconnue / spontanée → générique)	Évolution des procédures (connue → inconnue / spontanée → générique)		Construction d'une procédure : générique ou spontanée	Construction d'une procédure : générique ou spontanée		
Passerelle vers une autre séance		Séance 4		Séance 6b	Séance 6b				Séance 10		